Một cách giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính trong mô hình phần tử hữu hạn sóng động học một chiều

Lương Tuấn Anh, Viện Khoa học Khí tượng Thủy văn và Môi trường
Nguyễn Thanh Sơn, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

Tóm tắt: Bài báo đề cập đến việc đánh giá hiệu quả của các sơ đồ giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính, xuất hiện khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn đối với phương trình sóng động học một chiều. Sơ đồ hiện, sơ đồ nửa ẩn và ẩn, sơ đồ Runge-Kutta bậc 3 đã được xem xét, đánh giá. Kết quả nghiên cứu cho thấy sơ đồ Runge- Kutta bậc 3 có độ ổn định và độ chính xác cao đối với việc giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính trong mô hình phần tử hữu hạn sóng động học một chiều.

Mở đầu

Mô hình phần tử hữu hạn xuất phát từ việc xấp xỉ các biến liên tục theo không gian và thời gian bằng tổ hợp các hàm không gian và thời gian riêng rẽ. Việc xử lý gần đúng như vậy sẽ dẫn đến sai số và phương pháp số dư có trọng số là phương pháp buộc tổng sai số bằng không đối với một hàm trọng số nào đó. Phương pháp Galerkin là trường hợp riêng của phương pháp số dư có trọng số khi hàm trọng số chính là hàm nội suy không gian, xác định trong một giới hạn nhất định được gọi là phần tử. Nói chung, phương pháp số dư có trọng số là một phép biến đổi hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về dạng hệ các phương trình vi phân thường. Do đó, đối với các bài toán áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn, ngoài việc nghiên cứu đánh giá độ ổn định, độ chính xác của các sơ đồ tính thông qua các hàm nội suy không gian [3] thì việc nghiên cứu các phương pháp có hiệu quả để giải các hệ phương trình vi phân thường khi áp dụng phương pháp Galerkin đối với hệ phương trình sóng động học 1 chiều áp dụng cho bài toán dòng chảy sườn dốc và trong sông là rất cần thiết để thu được các thuật toán có hiệu quả cao.

Về việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn đối với phương trình sóng động học 1 chiều đã được đề cập đến trong các công trình nghiên cứu ở trong và ngoài nước [3, 4, 5], trong bài báo này chúng tôi đề cập đến một cách giải có hiệu quả hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính nảy sinh khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn đối với hệ phương trình sóng động học.

Mô hình sóng động học 1 chiều đối với dòng chảy sườn dốc và trong sông

Hệ phương trình sóng động lực, nếu bỏ qua thành phần quán tính và lực áp, thêm lượng gia nhập khu giữa *q,* hoặc lượng mưa hiệu quả r_e sẽ thu được hệ phương trình sóng động học:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r_e(x, t) \qquad (1)$$

và phương trình động lượng:

$$S_0 = S_f \qquad (2)$$

kết hợp với phương trình Manning:

$$q = \alpha h^{\beta} \qquad (3)$$

Trong đó:

q - Lưu lượng đơn vị của dòng chảy sườn dốc hoặc trong sông (m^2/s);

S_o - Độ dốc sườn dốc hoặc độ dốc lòng sông (m/m);

S_f - Độ dốc ma sát hay độ dốc cản (m/m);

r_e - Lượng mưa hiệu quả (lượng mưa trừ tổn thất) hoặc lượng dòng chảy nhập bên (m/s).

α - Hệ số phụ thuộc độ dốc sườn dốc, hệ số nhám của bề mặt lưu vực; hệ số nhám có trị số phụ thuộc vào sử dụng đất, đối với lưu vực đô thị đang phát triển, trị số này trong khoảng 0.10 - 0.15;

β - Hệ số có trị số bằng khoảng 5/3.

Hệ phương trình sóng động học (1-3) thể hiện sự chuyển động của chất lỏng do sự cân bằng giữa trọng lực và lực ma sát. Hệ phương trình sóng động học có một sóng truyền xuôi dọc theo dòng chảy xuất hiện do sự biến đổi lưu lượng theo mặt cắt do lượng gia nhập khu giữa. Do đó, hệ phương trình chỉ đòi hỏi *01* điều kiện biên trên mà không cần điều kiện biên dưới.

Theo các nhà thủy văn học [2] thì phương trình sóng động học thích hợp với việc mô tả chuyển động của dòng chảy trên bề mặt lưu vực và trong hệ thống lòng dẫn có độ dốc tương đối lớn, không bị ảnh hưởng của thủy triều, nước vật đáng kể.

Nghiệm số sóng động học gồm hai biến của trường cần xác định là q và h. Theo phương pháp Phần Tử Hữu Hạn (PTHH) các ẩn cần tìm tại các điểm nút của phần tử q và h có thể được phân bố trong từng phần tử theo quy luật sau:

$$q(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} N_i(x) q_i(t) \quad ; \qquad h(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} N_i(x) h_i(t)$$

Trong đó: $h_i(t)$ - độ sâu dòng chảy và $q_i(t)$ - dòng chảy đơn vị, hàm số chỉ phụ thuộc vào thời gian; $N_i(x)$ - hàm số nội suy; n - số lượng nút trong một phần tử.

Phương pháp Galerkin đối với hệ phương trình sóng động học 1 chiều có dạng:

$$\sum_{i=1}^{NE} \int_{D_e} \left\{ N_i \left[\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} - r_e(x,t) \right] \right\} dD_e = 0 \qquad (4)$$

Tổng hợp các phương trình cho N phần tử thu được phương trình ma trận:

$$[F_A]\left\{\frac{dh}{dt}\right\}+[F_Q]\{\alpha h^{\beta}\}-\{F_q\}=0 \qquad (5)$$

Hệ phương trình (5) là hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính, có mức độ phức tạp khác nhau tuỳ thuộc vào cấu trúc của ma trận $[\mathrm{F_A}]$. Trong trường hợp sử dụng hàm nội suy tập trung (lumped scheme, [3]), ma trận $[\mathrm{F_A}]$ là ma trận 1 đường chéo, còn trong các trường hợp khác [4, 5] ma trận này có các cấu trúc khác nhau. Tuy vậy, có thể đưa hệ (5) về dạng hệ các phương trình vi phân thường bằng việc ứng dụng thuật toán SVD, khi đó, ma trận $[\mathrm{F_A}]$ được khai triển dưới dạng [7]:

$$[\mathrm{F_A}]=[\mathrm{U}][\delta_i \mathrm{E}][\mathrm{V}]^{\mathrm{T}}$$

Trong đó: các ma trận $[\mathrm{U}]$ và $[\mathrm{V}]$ là hai ma trận trực giao; $[\mathrm{E}]$ là ma trận đơn vị.

Sau phép biến đổi này, phương trình (5) có thể đưa về dạng phương trình vi phân thường phi tuyến tính chuẩn:

$$\left\{\frac{dh}{dt}\right\}=\{f\}-[A]\{\alpha h^{\beta}\} \qquad (6)$$

Phương pháp giải hệ phương trình vi phân phi tuyến tính trong mô hình phần tử hữu hạn sóng động học 1 chiều

(i) Sơ đồ sai phân hiện và phương pháp khử Gaus:

Hệ phương trình (6) là hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau như phương pháp sai phân hiện theo thời gian và giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gaus [4]. Tuy nhiên, việc giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính bằng cách này thường gặp sự bất ổn định về nghiệm số sóng động học như đã được trình bày trong công trình nghiên cứu [3]. Do đó, trong bài báo này, một cách giải hiệu quả hệ phương trình vi phân phi tuyến sẽ được đề cập nghiên cứu.

(ii) Thuật toán lặp thường:

Thuật toán lặp thường để giải hệ ODE (5) được *Blandford và Meadows* đề xuất năm 1990 [5], như sau:

$$[F_A]\{h\}_{t+\Delta t} = \{f_q\} - \Delta t[F_Q]\{q(h)\}_{t+\theta\Delta t} \qquad (7)$$

Phương pháp lặp được sử dụng để giải phương trình trên với thuật toán như sau:

$$[F_A]\{h\}_{t+\Delta t}^{i+1} = \{f_q\} - \Delta t[F_Q]\{q(h_{t+\theta\Delta t}^{i})\} \qquad (8)$$

Phép lặp được thực hiện đến khi điều kiện hội tụ được bảo đảm: $\left\| h_{t+\Delta t}^{i+1} - h_{t+\Delta t}^{i} \right\| \le \varepsilon$;

$\frac{1}{2} \le \theta \le 1$; ε : sai số phép lặp.

(iii) Thuật toán nửa ẩn (Enhanced Explicit)

Phương pháp này được *F.H. Jaber và R.H. Mohtar* đề xuất năm 2002 [3]:

$$[A]\{h_{new}\} = [P]\{h_{old}\} + \Delta t\{f_q\} \qquad (9)$$

Trong đó:

$[A] = [F_A] + 0.5\Delta t\mu[F_Q]$ và $[P] = [F_A] - 0.5\Delta t\mu[F_Q]$;

Khi đó thuật toán này có dạng:

$$\{h_{new}\} = [A]^{-1}[P]\{h_{old}\} + \Delta t[A]^{-1}\{f_q\} \qquad (10)$$

Thuật toán này được xử lý gần giống như cách giải do GS Nguyễn Ân Niên đề xuất trong mô hình KOD [1] .

(iv) Thuật toán bước lẻ:

Để giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính (6) xuất hiện khi áp dụng phương pháp Galerkin đối với phương trình sóng động học một chiều chúng tôi đề nghị áp dụng thuật toán Runge-Kutta bậc 3 như sau [6]:

- Tính các gia số của nghiệm:

Nghiệm cần tìm có dạng:

Có thể nhận thấy thuật toán không quá phức tạp, dễ lập trình và một chương trình tính toán đã lập được để giải hệ phương trình sóng động học theo các thuật toán đã trình bày ở trên cho quy mô lưu vực sông .

(v) Về việc lựa chọn cách tích phân hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính

Để phân tích sai số của các thuật toán giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính, xét công thức tính tích phân theo công thức hình chữ nhật và hình thang [7]:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

– Công thức hình chữ nhật:

$$R(f)=\sum_{i=1}^{n} h_i f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$$

- Công thức hình thang:

$$T(f)=\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

– Xét sai số:

$$I(f)-R(f)=E+F+...$$

$$I(f)-T(f)=-2E-4F+...$$

Trong đó:

$$E=\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n} h_i^3 f''(y_i) \quad \text{và} \quad F=\frac{1}{1920}\sum_{i=1}^{n} h_i^5 f^{IV}(y_i)$$

Vì công thức tính theo R có độ chính xác hơn công thức tính theo T nên nếu chọn tổ hợp:

$$S(f)=\frac{2}{3}R(f)+\frac{1}{3}T(f)$$

Sẽ thu được công thức tính có độ sai số:

$$I(f)-S(f)=\frac{2}{3}\left[I(f)-R(f)\right]+\frac{1}{3}\left[I(f)-T(f)\right]=-\frac{1}{2880}\sum_{i=1}^{n}h_i^5 f^{IV}(y_i)+\ldots$$

Công thức tổ hợp trên sử dụng trong tích phân được gọi là phương pháp Romberg và ý tưởng tương tự được áp dụng trong phép vi phân là *với các cách xấp xỉ gần đúng có độ chính xác cùng bậc nhưng tổ hợp có trọng số của nó sẽ cho kết quả tính có độ chính xác mấy bậc cao hơn chính là phương pháp ngoại suy nghiệm Richarson* và một phương pháp áp dụng ý tưởng này là thuật toán Runge-Kutta và do đó, thuật toán này có hiệu quả đối với các hệ phương trình vi phân thường.

(vi) Thực nghiệm số:

Các phương pháp sau được áp dụng trong các thực nghiệm số:

- Phương pháp sai phân hiện;
- Phương pháp nửa ẩn;
- Phương pháp Runge-Kutta bậc 3.

Một lưu vực sông được chia làm 9 đoạn sông gồm 39 dải dòng chảy và 150 phần tử có các kích thước khác nhau đã được sử dụng trong các thực nghiệm số. Kết quả cho thấy phương pháp sai phân hiện ổn định trong khoảng thời gian tính 10 giây, phương pháp nửa ẩn ổn định trong khoảng 5 phút và phương pháp Runge-Kutta ổn định trong khoảng 10 phút.

Nhận xét, kiến nghị

- Đối với mô hình phần tử hữu hạn sóng động học 1 chiều, phương pháp có hiệu quả về tính ổn định và độ chính xác để giải hệ phương trình vi phân phi tuyến tính là phương pháp Runge-Kutta xét về góc độ lý thuyết cũng như thực nghiệm số.

- Phương pháp nửa ẩn cũng cho kết quả có độ ổn định khá cao, phương pháp giải hiện có hiệu quả thấp và phương pháp lặp thường hiệu quả tính không cao do phương pháp giải không trực tiếp và sự hội tụ của phép lặp còn phụ thuộc vào sự ước lượng nghiệm ban đầu.

- Cũng cần lưu ý rằng đối với bài toán biên, phương pháp giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính cũng cần những xử lý nhất định.

Tài liệu tham khảo

1. *Nguyễn Ân Niên (1991):* Phương pháp Thủy lực giải các bài toán lũ trên sông. Trường Đại học Thuỷ lợi. Bộ Thủy lợi. Hà Nội, 1991.

2. *Kuchment L. S. (1980):* Mô hình hoá toán học dòng chảy sông. NXB Leningrat, 1980 (tiếng Nga).

3. *Jaber F. H. and Mohtar R. H. (2002)*: Stability and Accuracy of Finite Element Schemes for the one-dimensional kinematic wave solution. Advances in Water Resources 25, 2002, 427-438.

4. *Ross B.B., Contractor D.N. and Shanholtz V.O. (1979):* Finite element model of overland and channel flow for assessing the hydrologic impact of land - use change. Journal of Hydrology, 41, 1979, 11-30

5. *Blandford G. E. and Meadows M. E. (1990)*: Finite Element Simulation of Nonlinear Kinematic Surface Runoff. Journal of Hydrology, 119 , pp. 335-356.

6. *Chow V. T, NNK (1988):* Applied Hydrology. Mc Graw Hill, 1988.
7. *G.E., Malcolm M.A.., Moler C. B. (1977):* Computer Method for Mathematical Computations. Prentice-Hall (Russian translation from English, 1980).

A solution of ordinary different equations in finite element one-dimensional kinematic wave model

Luong Tuan Anh, *Research Center of Hydrology and Water Resources*

Nguyen Thanh Sơn, *College of Sciense, VNU*

The paper concerns with the analysis of the schemes for solution of the system of ordinany different equations (ODE) ocurring in finite element one-dimensional kinematic wave model. Explicit scheme, enhanced explicit, interactive implicit and Runge-Kutta schemes have been considered for solution of the system of ODE. The results of the research show that the Runge- Kutta scheme give the best solution for system of ordinary different equations in finite element kinematic wave model.